

四川轻化工大学 2022 年研究生招生考试业务课试卷

(满分: 150 分, 所有答案一律写在答题纸上)

适用专业: 0701 数学

考试科目: 808 高等代数 A 卷

考试时间: 3 小时

一、填空 (每题 5 分, 共 30 分)

1. 设 A 为不可逆方阵, A^* 表示 A 的伴随矩阵, A^T 表示 A 的转置矩阵, 且 $A^* = A^T$, 则 $A =$ _____。
2. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似, 则 a, b 的值为: _____。
3. 若线性变换 σ 关于基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 那么 σ 关于基 $3\varepsilon_2, \varepsilon_1$ 的矩阵为: _____。
4. 已知 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 A^2 的迹为 $tr(A^2) =$ _____。
5. 设矩阵 $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $M_{21} + M_{22} - M_{23} =$ _____。(其中 M_{ij} 是元素 a_{ij} 的余子式)
6. 已知向量 $\alpha = (0, 1, -1, 1)^T$, 且 $E + x\alpha\alpha^T$ 与 $E + 2\alpha\alpha^T$ 互为逆矩阵 (其中 E 为单位矩阵), 则 $x =$ _____。

二、计算或证明 (共 90 分)

1. (14分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$,
 - (1) 用合同变换 $X = CY$ 将其化为标准形, 并写出变换矩阵 C ;
 - (2) 若 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX = 1$, 它是什么曲面?

2. (16分) 已知 \mathbb{R}^3 的线性变换 $\tau(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, 求 τ 的值域 $\tau(\mathbb{R}^3)$ 与 τ 的核 $\tau^{-1}(0)$ 的基与维数。

3. (16分) 设方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| (i = 1, 2, \dots, n)$, 证明 $|A| \neq 0$ 。

4. (14分) 设 $A \in P^{m \times n}$, β 是数域 P 上的 n 维列向量, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, 而 β 不是方程组 $AX = 0$ 的解, 证明: 向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \dots, \beta + \alpha_n$ 线性无关。

5. (12分) 设 $f(x)$ 是数域 P 上的多项式, a 是 $f'''(x)$ 的 k 重根, 证明 a 是

$$g(x) = \frac{x-a}{2} [f'(x) + f'(a)] - f(x) + f(a)$$

的 $k+3$ 重根。

6. (18分) 设数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 满足 $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 5b_{n-1} \\ b_n = \frac{1}{3}a_{n-1} - \frac{2}{3}b_{n-1} \end{cases}$, 且 $a_0 = b_0 = 1$, 求数列

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的通项公式。

三、探索题 (共30分)

复数域上的 n 阶方阵 A , A 的转置共轭记作 A^H , 若 $A^H = A$, 即

$$\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{n2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 A 为 Hermite 矩阵。若 $A^H = -A$, 则称 A 为反 Hermite 矩阵。

已知对 n 阶方阵 A, B , 有 $(AB)^H = B^H A^H$ 。请判断下列结论是否正确, 若正确, 给出证明; 若不正确, 给出反例 (正确判断出 1 个结论的正误给 5 分, 给出其证明或反例再给 5 分; 若能给出关于 Hermite 矩阵的其他未在下面列出的正确结论, 给 10 分, 若同时给出了结论的证明, 再给 5 分。本题得分上限为 30 分)。

1. A 为任意复矩阵, $(A^H)^H = A$;
2. Hermite 矩阵 A 的对角线上元素必为实数;
3. Hermite 矩阵 A 是对称矩阵;
4. 若 A 为 Hermite 矩阵, k 为任意实数, 则 kA 也为 Hermite 矩阵;
5. 若 A 为 Hermite 矩阵, 则 $AA^H, A^H A$ 也为 Hermite 矩阵。