

四川轻化工大学 2022 年研究生招生考试业务课试卷

(满分: 150 分, 所有答案一律写在答题纸上)

适用专业: 0701 数学

考试科目: 601 数学分析 A 卷

考试时间: 3 小时

一、填空题 (本题满分 40 分, 每小题 5 分)

1. 若极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 不定积分  $\int \frac{1}{1 + e^x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 若  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  在  $x = 1$  处有极值  $-2$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 设  $f \in C[a, b]$ ,  $F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt, x \in [a, b]$ , 则  $\frac{d^2 F}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 曲线  $y = e^{-x^2}$  的渐近线为:  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$  的精确定义为:  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 若幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $R_1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$  的收敛半径  $R_2$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$  的收敛半径  $R = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 不定积分  $\int 2^x \cdot 3^x dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

二、(本题满分 20 分, 每小题 10 分)

1. 利用定积分求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}} \right)$ .

2. 设  $f(x)$  在  $R$  内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)]$ ,

求常数  $c$  的值.

三、(本题满分 10 分) 计算  $\iint_D |\cos(x+y)| dx dy$ , 其中  $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ .

四、(本题满分 12 分) 设  $0 < r \leq 2R$ , 求  $r$  取何值时, 球面  $x^2 + y^2 + (z-R)^2 = r^2$  在球  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  内部部分的面积最大.

五、(本题满分 10 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$  的收敛域.

六、(本题满分 12 分) 已知  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, n \geq 2$ .

(1) 推导  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$  的递推公式及计算公式, 并计算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$ ;

(2) 证明:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ .

七、(本题满分 10 分) 若  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续,  $\varphi(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \varphi(x)] = 0$ , 证明:  $\varphi(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续.

八、(本题满分 10 分) 若区间  $I$  上, 对任何正整数  $n$ ,

$$|u_n(x)| \leq v_n(x),$$

证明: 当函数项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$  在  $I$  上一致收敛时,  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  在  $I$  上也一致收敛.

九、(本题满分 12 分) 设可微函数  $F(x, y, z)$  为  $n$  次齐次函数, 即:

$$F(tx, ty, tz) = t^n F(x, y, z), t > 0.$$

(1) 证明:  $xF_x(x, y, z) + yF_y(x, y, z) + zF_z(x, y, z) = nF(x, y, z)$ ;

(2) 证明: 在曲面  $F(x, y, z) = 1$  上非奇异点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面方程为:

$$xF_x(P_0) + yF_y(P_0) + zF_z(P_0) = n.$$

注: 若  $(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)) \neq (0, 0, 0)$ , 则称  $P_0$  为  $F$  的非奇异点.

十、(本题满分 14 分) 设  $x_1 > 0$ , 且  $x_{n+1} = 1 - e^{-x_n}, n = 1, 2, 3, \dots$ ,

(1) 用单调有界性定理证明  $\{x_n\}$  收敛, 并求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  的值;

(2) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}$  的值.