

## 四川轻化工大学 2023 年研究生招生考试业务课试卷

(满分: 150 分, 所有答案一律写在答题纸上)

适用专业: 0701 数学

考试科目: 808 高等代数 A 卷

考试时间: 3 小时

### 一、填空 (每题 5 分, 共 30 分)

1. 若  $m$  阶可逆矩阵  $A$  的每行元素之和均为  $a (a \neq 0)$ , 则  $A^{-1}$  的所有元素之和为\_\_\_\_\_。
2. 写出多项式  $f(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$  的全部有理根: \_\_\_\_\_。
3. 写出一个与矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  合同的矩阵: \_\_\_\_\_。
4.  $2n$  级排列  $13 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$  的逆序数为\_\_\_\_\_。
5. 设 4 阶方阵  $A, B$  的伴随矩阵为  $A^*, B^*$ , 且  $\text{rank}(A) = 3, \text{rank}(B) = 4$ , 则  $\text{rank}(A^* B^*) =$ \_\_\_\_\_。
6. 设  $V_1, V_2$  是线性空间  $V$  的两个子空间, 且  $V = V_1 \oplus V_2$  (其中  $\oplus$  表示直和), 则  $V, V_1, V_2$  的维数关系是\_\_\_\_\_。

### 二、计算或证明 (共 90 分)

1. (15 分) 设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $E$  为单位矩阵, 未知矩阵  $X$  满足  $AX = A + X$ .
  - (1) 证明  $A - E$  可逆;
  - (2) 当  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  时, 求矩阵  $X$ .
2. (15 分) 求由向量组  $\alpha_1 = (2, 1, 3, 1)^T, \alpha_2 = (1, 2, 0, 1)^T, \alpha_3 = (-1, 1, -3, 0)^T, \alpha_4 = (1, 1, 1, 1)^T$  生成的  $R^4$  的子空间的维数和一组基。



3. (15 分) 设矩阵  $A, B$  的列数均为  $n$  列, 证明:  $n$  元齐次线性方程组  $AX = 0$  与  $BX = 0$  同解当且仅当  $A, B$  的行向量组等价。

4. (25 分) 设  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为 3 阶单位矩阵,

(1) 证明:  $X^n = X^{n-2} + X^2 - E$  ( $n \geq 3$ );

(2) 求  $X^{100}$ .

5. (20 分) 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{5}{4} \end{vmatrix}$ .

### 三、探索题 (共 30 分)

复数域上的  $n$  阶方阵  $U$ ,  $U$  的转置共轭记作  $U^H$ , 即

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}, \quad U^H = \begin{pmatrix} \overline{u_{11}} & \overline{u_{21}} & \cdots & \overline{u_{n1}} \\ \overline{u_{12}} & \overline{u_{22}} & \cdots & \overline{u_{n2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{u_{1n}} & \overline{u_{2n}} & \cdots & \overline{u_{nn}} \end{pmatrix}.$$

若  $U^H U = U U^H = E$ , 则称  $U$  为酉矩阵。

已知对任意  $n$  阶方阵  $A, B$ , 有  $(AB)^H = B^H A^H$ ,  $(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$ . 请判断下列结论是否正确, 若正确, 给出证明; 若不正确, 给出反例 (正确判断出 1 个结论的正误给 5 分, 给出其证明或反例再给 5 分; 若能给出其他未在下面列出的正确结论, 给 10 分, 若同时给出其证明, 再给 5 分。本题得分上限为 30 分)。

1. 若  $U$  为酉矩阵, 则  $U$  可逆, 且逆矩阵  $U^{-1}$  也为酉矩阵;
2. 若  $U$  为酉矩阵, 则  $U$  的  $n$  个列向量是两两正交的单位向量;
3. 若  $U$  为酉矩阵,  $k$  为任意复数, 则  $kU$  也为酉矩阵。