

机密★启用前

四川轻化工大学 2023 年研究生招生考试业务课试卷

(满分: 150 分, 所有答案一律写在答题纸上)

适用专业: 0701 数学

考试科目: 601 数学分析 A 卷

考试时间: 3 小时

一、(本题满分 40 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\sin 2x - 2\sin x$ 与 x^k 是同阶无穷小量, 则 $k =$ _____;
2. 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 3$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____;
3. 不定积分 $\int \sin^3 x dx =$ _____;
4. 设 f 为可微函数, $z = z(x, y)$ 是方程 $f(x, x + y, x + y + z) = 0$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____;
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{1+x} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy =$ _____;
6. 设 f 可微, 则曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处法线的方向向量可取为: _____;
7. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$ 的 $\varepsilon - \delta$ 定义是: _____;
8. 交换二次积分 $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx$ 的次序为: _____.

二、(本题满分 20 分, 每小题 10 分) 求下列积分

1. 求 $\int_{-1}^1 \frac{1 + \sin x + x \ln(2 + x^4)}{(1 + x^2)^2} dx$;
2. 求 $\int_0^1 \frac{x^8 - x^2}{\ln x} dx$.

三、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导, 且 $f(a) \neq 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n$.

四、(本题满分 12 分) 计算曲线积分 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是不经过原点的任意闭曲线, 沿逆时针方向.

五、(本题满分 10 分) 设 $D = \{(x, y) | x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 求 $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$.

六、(本题满分 12 分) 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\lambda} dx$ 的敛散性.

七、(本题满分 10 分) 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

八、(本题满分 10 分) 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛.

九、(本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$, 有 $f(\xi) = \xi$;

(2) 对任意实数 λ , 存在 $\eta \in (0, \xi)$, 有 $f'(\eta) = \lambda(f(\eta) - \eta) + 1$.

十、(本题满分 14 分) 证明函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 偏

导存在且可微, 但其偏导数在点 $(0, 0)$ 不连续.